Lógica

9. **Métodos de demostración matemática**

Curso elaborado por Saúl Santiago

Introducción

Esto no es un curso completo de lógica, ni mucho menos una cátedra maestra, eh??, que quede claro..:-). Tan sólo son un pequeños apuntes para todos aquellos que tengan interés en las matemáticas, puedan así conocer las técnicas de la lógica. Si se desconocen éstas técnicas, no es posible dominar con propiedad los cursos superiores de matemáticas, ni conocer las muchas aplicaciones de las matemáticas a todas las ramas de la ciencia y tecnología.
Se verá aquí con detalle una exposición de las nociones clásicas de lógica y lo que es una demostracion matemática .
También se incluye una descripición elemental de las reglas y símbolos que se emplean en el razonamiento lógico.
Una de las mayores dificultades al analizar el rigor matemático de una demostración se halla en el hecho de que debemos comunicar nuestras ideas empleando el lenguaje ordinario, que está lleno de ambigüedades. En ocasiones es difícil decidir si determinada línea de razonamiento es correcta o no. La lógica elimina estas ambigüedades aclarando cómo se construyen las proposiciones, hallando su valor de verdad y estableciendo reglas específicas de inferencia por medio de las cuales se puede determinar si un razonamiento es válido o no.

En resumen ésta sección tiene por objeto dar una descripción elemental de las reglas y símbolos que se emplean en el razonamiento lógico. No será una exposición de tipo filosófico ni formal de la lógica.
Al final se verán los métodos de demostración matemática, que

es el objetivo fundamental de este apartado.

««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Nociones de Lógica elemental

Proposiciones

Una proposición se considera una frase, a la cual, se le puede asignar dos valores: o bién es verdadera, o bien es falsa, pero no ambas cosas. La verdad o falsedad de dicha proposición se le llama **su valor de verdad** .

Algunas proposiciones se pueden componer de dos o varias proposiciones simples, a los cuales, les llamaremos **proposiciones compuestas** . Esto lo veremos más adelante.

Comúnmente se suele denotar a las proposiciones mediante las letras: **« p, q, r, s...etc. »**

A continuación, veremos algunos ejemplos muy simples, de manera que se comprenda que son las proposiciones en Lógica.

p: 7 es un número par;

q: 2 + 2 = 4;
r: 2 es un número impar.

Como puedes darte cuenta, las proposiciones tanto p, q y r, tienen valores de verdad. De manera que la proposición p, su valor de verdad será *Falso* , pues 7 no es un número par. Para la proposición q, su valor de verdad será verdadero, siempre y cuando estemos hablando de el sistema decimal. El valor de verdad para r, será falso, pues 2 no es un número impar.

Ahora observemos este otro ejemplo:

¿Cómo éstas?

Observa que para esta expresión no es posible asignar un valor de verdad, no podemos decir que es falso, o bien, verdadero. De manere que no se trata de una proposición.
Bueno, dejemos éste ejemplo, y ahora veamos este otro:

Pedro está enfermo o viejo.

Esta expresión está formada implícitamente por dos proposiciones simples: *«Pedro está enfermo»* y la otra proposición, *«Pedro es viejo»*. Se trata de una proposición compuesta, donde su valor de verdad, está determinado por completo por el valor de verdad de cada uno de las proposiciones simples, y por el modo de como se les reúne para formar la proposición compuesta.
De manera que, la primera proposición: *«Pedro está enfermo»*, le podemos asignar un cierto valor de verdad, o bien es verdadero, o bien es falso.Para la segunda proposición: *«Pedro es viejo»*tambien se le puede asignar su valor de verdad: falso o verdadero.

La manera en que van a estar unidas ciertas proposiciones simples, para dar forma a proposiciones compuestas, será determinado rotundamente por el uso de conectivos. Estos los veremos en la sección siguiente.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Nociones de Lógica elemental

Conjunción

Anteriormente vimos que la unión de proposiciones simples dan lugar a proposiciones compuestas. El primer caso que veremos de proposiciones compuestas será la **conjunción** .

Cuando dos proposiciones simples se combinan mediante la palabra **« y »** , la proposición compuesta resultante se le llama **conjunción** .

Para la conjunción usaremos el simbolo lógico **^**.

De esta manera, se tiene que la nueva proposicion **p ^ q** se llama conjunción de « p y q ».

Ahora, el valor de verdad, para la conjunción de dos proposiciones cualesquiera, «p y q» será de la siguiente manera:

p ^ q debe ser verdadera, si, y solamente si, tanto p, como q, son verdaderas. De manera que, si al menos, una de las proposiciones simples es falsa, entonces, el valor de verdad para **p ^ q** , es falso.

Mas adelante revisaremos esto con mayor profundidad, cuando lleguemos a la sección de las «Tablas de Verdad».

Por ahora veamos un par de ejemplos sencillos para comprender el estudio de la conjunción.

1.- Si p es la proposición: **«1 es un número impar»** y q es la proposición: **«3 es un número primo»**, entonces p ^ q será la proposición: **«1 es un número impar y 3 es un número primo»**. En donde se observa que p ^ q su valor de verdad es verdadero, pues tanto p: **«1 es un número impar»**, como q: **«3 es un número primo»**,ambos son verdaderos.

2.- Si p es la proposición: **«París está en Francia»** y q es la proposición: **«2 es un número impar»**, entonces la proposición: **p ^ q** será **«París está en Francia y 2 es un número impar»**, donde su valor de verdad es: falso, pues el valor de verdad de q: **«París está en Francia»** , es verdadero, pero el valor de q: **«2 es un número impar»** es falso.

Nociones de Lógica elemental

Disyunción

En matemáticas se emplea la palabra **«o»** en el sentido inclusivo, como el término y/o.
Entonces una proposición del tipo **«p o q»** se toma siempre como **«p o q ó ambas»**.Dado esto admitimos la frase compuesta como una proposición.
Simbolicamente la denotaremos escribiendo **p ∨ q** .

A esta nueva proposición compuesta se le llama **Disyunción**, de modo que la proposición p ∨ q se llama disyunción de p y q.

El valor de verdad de la proposición compuesta p ∨ q cumple la condición siguiente:

Si p es verdadero o q es verdadero o si ambos, entonces p ∨ q es verdadero; en cualquier otro caso p ∨ q es falso. Es decir la disyunción de dos proposiciones es falsa solamente si cada proposición componente es falsa.

Veamos a continuación los siguientes ejemplos:

1.- Si p es la proposición **«2 es un número par»** y q es la proposición **«3 es un número primo»**, entonces la disyunción p ∨ q será la proposición **«2 es un número par o 3 es un número primo»**.Donde el valor de la disyunción es verdadero pues tanto p y q son ambas verdaderas.

2.- Si p es la proposición **«2 < 3»** y q es la proposición **«4 es un número primo»**. Entonces la disyunción p ∨ q es la proposición:**«2 < 3 o 4 es un número primo»**. Donde el valor de verdad de p ∨ q es verdadero, pues p **«2 < 3»** es verdadero, y q **«4 es un número primo»** es falso.

Con esto se observa: si al menos una de las proposiciones que forman la disyunción p ∨ q es verdadera, entonces el valor de la disyunción es verdadera.

3.- Si p es: **«París se encuentra en Inglaterra»** y q es: **«2 + 2 = 5»**, luego entonces el valor de la disyunción p ∨ q será falso, pues tanto p como q, ambas son falsas.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Nociones de Lógica elemental

Negación

Si p es una proposición fundamental, de ésta se puede formar otra proposición, que se le llama *Negación de p*, escribiendo: **«Es falso que»** antes de p, ó, cuando es posible, se inserta en p la palabra **«No»**.

Simbólicamente denotaremos a la negación por **~p**, aunque existen varias maneras de hacerlo, algunos autores usan las notaciones para la negación de una proposición p como: *¬p ,-p , etc....*, nosotros utilizaremos la notación **~p**.

El valor de verdad de la negación de una proposición fundamental depende de la condición siguiente:

Si p es verdadero, entonces **~p** es falso;
si p es falso, entonces **~p** es verdadero. Es decir el valor de verdad de la negación de una proposición fundamental es siempre opuesto del valor de verdad de la proposcion.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1.- Si p es la proposición **«Alemania se encuentra en Europa»**,entonces la negación de p, **~p**, será la proposición: **«Es falso que Alemania se encuentre en Europa»**
Es obvio que el valor de verdad para **~p** es falso, pues la proposición p: **«Alemania se encuentra en Europa»** es verdadero.
Tambien se pudo haber expresado la negación de p como:**«Alemania no se encuentra en Europa»**.

2.- Si p es la proposición: **«2 * 3 = 7»**, entonces **~p** es la proposición: **«2 * 3 /= 7»**, donde el valor de verdad de **~p** es verdadero, pues p**«2 * 3 = 7»**, es falso.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Nociones de Lógica elemental

Condicional

En matemáticas se suele utilizar muy frecuentemente la proposición **«Si p, entonces q»**. Tales proposiciones se llaman condicionales y se le denota por:

p --> q

El condicional **p --> q** también se puede expresar de las siguientes maneras:

a. **p implica q**
b. **p solamente si q**
c. **p es suficiente para q**
d. **q es necesario para p**

Veamos un ejemplito, el cual te ayudara a comprender las maneras en que una proposición condicional se puede expresar:

Por ejemplo, cuando decimos:

Mi automóvil funciona si hay gasolina en el tanque.

Este enunciado es equivalente a expresarlo de las siguientes maneras:

a) Si hay gasolina en el tanque, entonces mi automóvil funciona.

Observa que en este caso la proposición condicional es del caso: **«Si p, entonces q».**

b) Mi automóvil sólo funciona si hay gasolina en el tanque.

En este caso la proposición condicional es del caso: **«p solamente si q»**.

c) Si hay gasolina en el tanque, es suficiente para que mi automovil funcione

En este caso la condicional es de la forma: **«p es suficiente par q»**.

d) Para que mi automóvil funcione es necesario que haya gasolina en el tanque.

Para este caso la proposición condicional es de la forma: **«q es necesario para q»**.

e) Que haya gasolina en el tanque implica que mi auto funcione.

En este caso la condicional es de la forma: **«p implica q»**.

El valor de verdad de la proposición condicional **p --> q** está dada de la siguiente condición:

El condicional **p --> q** es verdadero a menos que p sea verdadero y q falso. Es decir, una proposición verdadera no puede implicar una falsa.

La proposición condicional juega un papel muy importante en matemáticas, en particular, en la demostración matemática. Veremos mas adelante cuando lleguemos a este tema, que los teoremas, corolarios,.etc,etc...vendran dadas por una serie de condiciones a la que llamaremos: Hipótesis o antecedentes, lo cual implican un consecuente. En el condicional **p --> q** a p se le llama el antecedente, y a q el consecuente.

Tambien, es muy importante comprender el carácter que tiene el condicional **p --> q**, es decir, si llegara a ocurrir p....entonces q, no es necesario a que siempre ocurra p para que entonces q.

Veamos algunos ejemplos para aclararte esto:

1.- Si mañana llueve, entonces hará frio.

Se observa, de que, si llega a ocurrir de que el día de mañana llueva, entonces el día de mañana será frío. Ahora, para saber el valor de verdad de esta proposición, depende de los factores climatológicos que se presenten para el día de mañana. Es decir, puede ser que mañana llueva, pero no haga frío, en este caso dado la ley del valor de verdad de la condicional, sería falsa. Pues una proposición verdadera no implica una proposicion falsa.

2.- Si a y b son números pares, entonces la suma (a+b) tambien es un número par.

Para este caso, si se tienen que dos números son pares entonces su suma son otro número par, es decir, no afirma que para cualesquiera dos números la suma de estos es un número par.

Otra observación interesante que hay que notar, es como ya dijimos anteriormente de que el valor de verdad de la proposición condicional **p --> q** es falso, si p es verdadero y q es falso. Ahora puede puede ser que te sorprenda de que el valor de verdad de la condicional **p --> q** es verdadero, dado que q es falsa y q verdadera, o más aún, es verdadero, dado que p es falsa y también q es falsa.
Veamos otro ejemplo para aclarar esto:

Sea la proposición condicional: **«Si 4 es un número primo, entonces 6 es un número primo».** Es una proposición verdadera a pesar de que **«4 es un número primo»** es una proposición falsa. El que la proposición **«6 es un número primo»** sea falsa, no tiene importancia. Nada se afirma con respecto al valor de verdad de q en este caso, solamente el valor de verdad de **p --> q**, y éste queda completamente determinado por las tablas de verdad que veremos mas adelante.

Nociones de Lógica elemental

Bicondicional

Otro tipo de proposición que se presenta con frecuencia es de la forma **«p si, y solamente si, q»** que se suele abreviar **«p ssi q»**. Intuitivamente esta proposición parece ser la combinación de **p --> q** y **q --> p**

A este conectivo lógico especial lo llamamos **condicional** y se denota por el simbolo **<-->**, entonces **p <--> q** es lo mismo que **(p --> q)** y **(q --> p)** o aplicando la definición de la conjunción, que vimos en una de las secciones anteriores, **(p --> q)** ^ **(q --> p)**.

El valor de verdad de las proposiciones Bicondicionales **p <--> q** obedece a la condición:

Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces **p <--> q**, es verdadero.
Si p y q tienen valores de verdad opuestos, entonces **p <--> q**

es falso. Dicho de otra manera: si tanto p como q son verdaderos, entonces **p <--> q** es verdadero.
Si tanto p como q son falsos, entonces **p <--> q** tambien es verdadero.
Si p es verdadero y q falso, entonces **p <--> q** es falso.
Si p es falso y q verdadero, entonces **p <--> q** también es falso

Veamos los ejemplos siguientes:

1.- 3 + 2 = 7 si, y solamente si, 4 + 4 = 8.

Si se toma p como: **«3 + 2 = 7»** y q como: **«4 + 4 = 8»**, entonces el valor de verdad de p, es falso, pero el valor de verdad de q es verdadero, luego entonces la bicondicional **p <--> q** es falsa.

2.- Londres está en Inglaterra si, y solamente si, París está en Francia.

Sea p **«Londres está en Inglaterra»** y q **«París está en Francia»**, entonces tanto el valor de p, como de q, son verdaderos,es decir tienen el mismo valor de verdad, luego entonces la bicondicional **p <--> q** es verdadera.

3.- 10 es un número impar si, y solamente si, 6 es un número primo

Si p es: **«10 es un número impar»** y q es: **«6 es un número primo»**, entonces se observa que tanto el valor de verdad de p, como de q, son falso, es decir tienen el mismo valor de verdad, luego entonces la bicondicional **p <--> q** es verdadera.

Hasta ahora, hemos visto las definiciones de el uso de conectivos en Lógica y algunos ejemplos muy sencillos con el fin de facilitar la comprension de dicho estudio

A manera de recapitulación en la sección siguiente verás una serie de ejercicios que abarcan todo lo que hemos visto hasta ahora.
Te aconsejo que los veas y trates de resolverlos tú mismo, si esto no es así, entonces podrás ver la respuesta a cada ejercicio.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Tablas de Verdad

Ahora resumamos lo que se ha visto hasta ahora:

A partir de el conjunto original de proposiciones fundamentales hemos formado un nuevo conjunto, aceptando en él toda combinación de proposiciones del conjunto original, que se pueden formar empleando los conectivos lógicos ^, v, ~. Los elementos del último conjunto se le llaman *proposiciones compuestas*. Podemos tener ahora proposiciones compuestas del tipo (p ^ q)v r.
El valor de verdad que se asigna a una proposición compuesta suponemos que se asigna de acuerdo con la extensión natural de las hipótesis anteriores.
Dichas hipótesis se resumen y se generalizan por medio de lo que se llama una **tabla de verdad**
Se puede conocer el valor de verdad de una proposición, que contiene conectivos, determinando el valor de verdad de cada una de las componentes. A una proposición p se le asigna los valores V o F, escritos en este orden, debajo de la proposición p. Las tablas de verdad para los conectivos ~, v, ^,-->, <--> se verán a continuación.

Tabla de verdad para ~p.

p	~ p
V	F
F	V

Esta tabla nos hace recordar la definición que vimos anteriormente de la negación, que dice: si el valor de verdad de p es verdadero, entonces el valor de verdad de ~p es falso. Si el valor de verdad de p es falso, entonces el valor de verdad de ~p es verdadero.

Tabla de verdad para p v q.

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En esta tabla se observa: Si p es verdadero o q es verdadero o si ambos p y q son verdaderos, entonces p v q es verdadero; en otro caso p v q es falso. Es decir, la disyunción de dos proposiciones es falsa solamente si cada proposición componente es falsa.

Tabla de verdad para p ^ q.

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla nos hace ver la definición de la conjunción:
Si p es verdadero y q es verdadero, entonces p ^ q es verdadero; en otro caso p ^ q es falso. Es decir, la conjunción de dos proposiciones es verdadera solamente si cada componente es verdadero.

Tabla de verdad para p --> q.

p	q	p --> q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De la tabla anterior se abserva que el condicional p --> q es verdadero a menos que p sea verdadero y q falso. Es decir una proposición verdadera no puede implicar una falsa.

Tabla de verdad para p <--> q.

p	q	p <--> q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De la anterior tabla se puede observar que:
Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces p <--> q es verdadero; si p y q tienen valores de verdad opuestos, entonces p <--> q es falso.

Las tablas de verdad anteriores son las que se necesitan para deducir el valor de verdad de cualquier proposición por complicada que sea. A las tablas de verdad deducidas a partir de ellas se les llama ***tablas de verdad deducidas***

Ilustremos esto con el siguiente ejemplo:
Calculemos la tabla de verdad de la proposición ~p v q. Como se indica en la tabla que veremos a continuación, para construir dicha tabla, debemos empezar con todas las posibles combinaciones de valores de verdad de p que se deducen de la primera columna, podemos escribir la columna dos en la cuarta columna, finalmente aplicamos la definición de la disyunción para ~p v q. Esto lo verificamos con la siguiente tabla:

Tabla de verdad para ~p v q.

p	q	~p	q	~p v q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Nota:
De la tabla anterior podemos observar lo siguiente:Si comparamos las columnas primera y segunda con los de la cuarta columna, es decir los valores de verdad de p y q con los valores de verdad de ~p v q, observamos que ~p v q es falsa solamente cuando p es verdadera y q es falsa. Esto nos hace recordar los valores de la proposición condicional p <--> q, veremos mas tarde la relación que existe entre éstas dos proposiciones.

Antes de continuar construyendo tablas de verdad mas complejas, es necesario dar una regla para la construcción de dichas tablas:

Regla:

Si tenemos dos proposiciones, como en todos los casos anteriores que hemos visto, necesitaremos cuatro filas. De estas cuatro filas la primera columna tendrá los valores de verdad: V,V, y F,F, y la segunda columna V,F,V y F. Las siguientes columnas tendrán los valores de verdad según la proposición dada.

Si se tienen tres proposiciones, necesitaremos ocho filas, de las cuales la primera columna se acomodarán los valores de verdad de la siguiente manera: V,V,V,V y F,F,F,F. Para la segunda columna se reparten los valores: V,V, F,F, V,V, F,F. Y para la tercera columna seran: V,F,V,F,V,F,V,F.

Para cuatro proposiciones, se necesitan 16 filas de las cuales en la primera columna se reparten los valores de verdad: 8 V y 8 F. La segunda columna empezará con cuatro V, despues cuatro F, y así sucesivamente hasta ocupar los 16 lugares, es decir, V,V,V,V F,F,F,F V,V,V,V y F,F,F,F. Para la tercera columna: V,V, F,F...hasta la fila número 16.

En general:

Analizando que para dos proposiciones se necesitan cuatro filas..o visto de otra manera: se necesitan $2^2 = 4$ filas. Para tres proposiciones se necesitan ocho filas, o, $2^3 = 8$. Para cuatro proposiciones necesitaremos $2^4 = 16$ filas...en general para n proposiciones necesitaremos 2^n filas.

Ilustremos todo esto con un ejemplo, construyamos la tabla de verdad para la proposición compuesta: **[(p v q) ^ r] --> ~q ^ p**. Este el caso para tres proposiciones:**p, q y r**, en donde según vimos anteriormente necesitamos ocho filas. En la primera columna irán repartidos los valores: V,V,V,V y F,F,F,F, para la segunda columna: V,V, F,F, V,V, F,F, y para la tercera

columna: V,F,V,F,V,F,V,F.
Se observa que la proposición compuesta **[(p v q) ^ r] --> ~q ^ p** a fín de cuentas es una condicional p --> q, donde digamoslo así p = [(p v q ^ r)] y q = ~q ^ p. Por tanto lo que nos interesa al final son los valores de verdad de la condicional -->.

Debemos encontrar los valores para la proposición **[(pvq) ^ r]**, donde observamos que esta proposición es una conjunción p ^ q, donde p = p v q y q = r, (conste que hago estas igualdades para que se te haga mas claro). Para esto encontraremos el valor de verdad de la disyunción **p v q** ,donde los valores de ésta se deducen de las columnas primera y segunda, los valores de esta disyunción las colocaremos en la cuarta columna. Ahora encontraremos los valores de verdad de la conjunción **[(p v q) ^ r]** de la cual los valores los podemos deducir de las columnas tercera y cuarta, dichos valores los colocamos en la quinta columna.

Ahora nos hace falta encontrar los valores de verdad de la proposición **~q ^ p**, la cual evidentemente se trata de una conjunción, para esto se necesita encontrar los valores de **~q** los cuales se deducen de la columna dos aplicando la ley de la negación: si q es V entonces ~q es F, si q es F entonces ~q es V..etc., a estos valores los colocamos en la columna número seis, y ahora hayamos los valores de la conjunción ~q ^ p, estos se deducen de las columnas primera y sexta, valores que colocamos en la séptima columna. Finalmente encontramos los valores de la implicación **[(p v q) ^ r] --> ~q ^ p** de donde ahora se pueden deducir con claridad de las columnas quinta y séptima, a estos valores los colocamos en la octava y última columna.

La tabla de dicha proposición es la siguiente:

Tabla de verdad para [(p v q) ^ r] --> ~q ^ p.

p	q	r	p v q	p v q ^ r	~q	~q ^ p	[(p v q ^ r] --> ~q ^ r
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	v	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V

En la siguiente sección veremos algunos ejercicios con respecto a los valores de las tablas de verdad de algunas proposiciones, al igual que en la seccion anterior de ejercicios, cada ejercicio viene con su respuesta.

««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Tautología

Ahora veamos un caso especial de proposiciones, las cuales se caracterizan por tener sólo el valor de verdad V en la última columna de sus tablas de verdad, independientemente de el valor de las demas proposiciones. Tales proposiciones se le llaman: **Tautologías**.
Algunas de estas tautologías son muy comunes y útiles y por eso se le llaman *leyes*.

Ahora costruyamos la tabla de verdad para la proposición: **p v ~p**.

Tabla de verdad para p v ~p.

p	~ p	p v ~ p
V	F	**V**
F	V	**V**

Se observa que el valor de verdad de esta proposicion p v ~p es V, independientemente de el valor de p. Por tanto se trata de una tautología. A dicha tautología se le llama **ley del tercio excluído**.

Construyamos la tabla de verdad para la proposición:

[(p --> q) ^ (q --> r)] --> (p --> r).

Tabla de verdad para: [(p --> q) ^ (q --> r)] --> (p --> r)

p	q	r	[(p	-->	q)	^	(q	-->	r)]	-->	(p	-->	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	**V**	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	**V**	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	**V**	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	**V**	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	**V**	F	V	F

A esta proposición se le conoce con el nombre de **La ley del**

silogismo, la cual es un principío fundamental del razonamiento lógico.

Antes de pasar a la siguiente observacion, veamos antes algo sobre notacion:
Podemos denotar a una proposición compuesta, como las que hemos visto desde casi el principio, como P(p,q,r,....), donde P es la proposición compuesta en sí, y p,q,r,...sus componentes.
Por ejemplo: La proposición anterior que vimos, **[(p -->q) ^ (q -->r)] --> (p -->r)**, podemos llamar a esta proposición compuesta como P, de componentes p,q y r. Es decir nuestra proposición compuesta es de la forma:
P(p,q,r).

Observacion:

Si P(q,r,s...) es una tautología, entonces ~P(q,r,s...) es una contradicción y viceversa

La siguiente sección se verá el concepto de contradicción.

Contradicción

La contradicción es una proposición compuesta: P(q,r,s...) que se caracteriza por tener sólo el valor de verdad F en la última columna de sus tablas de verdad, independientemente de el valor de las demás proposiciones: q,r,s...

Veamos la proposición **p ^ ~ p** y verificaremos que se trata de una contradicción.

p ^ ~p

p	~p	p ^ ~p
V	F	**F**
F	V	**F**

La tabla nos muestra que en la última columna aparecen los valores de verdad F, independientemente de los valores de p y

~p.

«««« Anterior Siguiente »»»»»»

Equivalencia lógica

Ahora supongamos que se tienen dos proposiciones P(p,q,...) y Q(p,q...), se dice que son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas, es decir, si la tabla de verdad de la proposicion P es idéntica a la de Q. Se denota a la Equivalencia lógica de las proposiciónes P(q,r,...) y Q(r,s,...) por:

P(q,r,...) **< -- >** Q(p,q,...)

Analicemos las siguientes tablas de verdad de las proposiciones:
(p --> q) ^ (q --> p) y p <--> q

(p --> q) ^ (q --> p)

p	q	p --> q	q --> p	p --> q ^ q --> p
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	V	V	**V**

p < -- > q

p	q	p <--> q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Luego (p --> q) ^ (q --> p) **< -- >** p <--> q, es decir, las proposiciones son lógicamente equivalentes

Tambien podemos hacer la siguiente observación:

P(p, q,...) **< -- >** Q(p, q,...) sí, y solamente sí, la proposición:

P(p,q,...) < -- > Q(p,q,...)

es una tautología

Verifiquemos ahora que las proposiciones p --> q y ~p v q son lógicamente equivalentes, es decir:

p --> q **< -- >** ~p v q

Para esto construiremos sus tablas de verdad y verificar que son idénticas. De la misma manera podemos hacer uso de la observación anterior, verificaremos que la proposición p --> q <--> ~p vq es una tautología.

p --> q

p	q	p --> q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

p <--> q

p	q	~ p	~ p v q
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

Vemos que las proposiciones son lógicamente equivalentes

De la misma manera verificamos que son lógicamente equivalentes comprobando la existencia de la tautología ya antes mencionada, es decir:

p --> q <--> ~p v q

p	q	~p	p --> q	~p v q	p --> q <--> ~p v q
V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	**V**

Así hemos presentado las dos maneras de verificar la equivalencia de dos proposiciones.

En la siguiente sección se verá lo que es una implicación lógica

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Implicación lógica

Se dice que una proposición $P(p,q,...)$ implica lógicamente una proposición $Q(p,q,...)$, lo que se escribe:

$$P(p,q,...) \dashrightarrow Q(p,q,...)$$

si se verifica una de las siguientes condiciones:

- $\sim P(p,q,...) \vee Q(p,q,...)$ es una tautología.
- $P(p,q,...) \wedge \sim Q(p,q,...)$ es una contradicción.
- $P(p,q,...) \dashrightarrow Q(p,q,...)$ es una tautología.

La proposición ya antes vista: [(p --> q) ^ (q --> r)] --> (p --> r) vimos que es una tautología, de acuerdo a la definición anterior, la proposición (p --> q) ^ (q --> r) implica lógicamente a la proposición (p -->r), es decir:

[(p --> q) ^ (q -->r)] **-->** (q -->r)

Consideremos ahora la proposición: (p ^ q) ^ ~(p v q), cuya tabla de verdad es la siguiente:

(p ^ q) ^ ~(p v q)

p	q	(p	^	q)	^	~	(p	v	q)
V	V	V	V	V	**F**	F	V	V	V
V	F	V	F	F	**F**	F	V	V	F
F	V	F	F	V	**F**	F	F	V	V
F	F	F	F	F	**F**	V	F	F	F

Se observa de la tabla que la proposición: (p ^ q) ^ ~(p v q) es una contradicción, por tanto por la deficnición anterior:

$$p \wedge q \dashrightarrow p \vee q$$

La siguiente sección se verán las leyes del álgebra de proposiciones.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Algebra de proposiciónes

A continuación se presentarán las proposiciónes que darán paso a las leyes del álgebra de proposiciones.

Las proposiciones mencionadas, son lógicamente equivalentes:

(1a) p v p < -- > p	(1b) p ^ p < -- > p
(2a) (p v q) v r < -- > p v (q v r)	(2b) (p ^ q) ^ r < -- > p ^ (q ^ r)
(3a) p v q < -- > q v p	(3b) p ^ q < -- > q ^ p
(4a) p v (q ^ r) < -- > (p v q) ^ (p v r)	(4b) p ^ (q v r) < -- > (p ^ q) v (p ^ r)
(5a) p v f < -- > p	(5b) p ^ v < -- > p
(6a) p v v < -- > v	(6b) p ^ f < -- > f
(7a) p v ~p < -- > v	(7b) p ^ ~p < -- > f
(8a) ~~p < -- > p	(8b) ~v < -- > f, ~f < -- > v

(9a) ~(p v q) **< -- >** ~p ∧ ~q

(9b) ~(p ∧ q) **< -- >** ~p v ~q

Podemos observar que v y f denotan variables cuyos valores estarán restringidos respectivamente a proposiciones verdaderos y falsos.

Las equivalencias se pueden demostrar construyendo las tablas de verdad y aplicando la definición de la sección anterior.

Verificaremos algunas de las proposiciones, aplicando la definición anterior.

(1a) p v p **< -- >** p

p v p < -- > p

p	p v p	p v p < -- > p
V	V	**V**
F	F	**V**

Se observa que la proposición de la tabla de verdad es una tautología, luego las proposiciones (1a) son lógicamente equivalentes

Ahora verifiquemos la proposición:

(5a) p v f **< -- >** p

Para esto debemos recordar que f, siempre tendrá el valor de verdad F.

p v f < -- > p

p	f	p v f	p v f < -- > p
V	F	V	**V**
F	F	F	**V**

La proposción es una tautología, luego entonces las proposiciones (5a) son lógicamente equivalentes

Algunas de las proposiciones a principio de esta sección, vienen en la sección de ejercicios.

La sección siguiente veremos, las proposiciones ya vistas en esta sección darán paso a las Leyes del álgebra de proposiciones, para esto veremos un teorema importante.

«««««« Anterior Siguiente »»»»»»

Leyes del álgebra de proposiciónes

Ahora veamos a continuación el siguiente Teorema:

Si P(p,q,...) **< -- >** Q(p,q,...), entonces P(P_1, P_2,...) **< -- >** Q(P_1, P_2,...) para cualesquiera proposiciones P_1, P_2,...

Es decir si se reemplazan las variables por proposiciones equivalentes, las proposiciones que resultan son tambien equivalentes.

De lo anterior se puede deducir, si verificamos que las proposiciones de la sección anterior son equivalentes, entonces las Leyes del álgebra de proposiciones tambien son equivalentes. Dichas leyes se ven a continuación.

Leyes del álgebra de proposiciones

Leyes de idempotencia

1a. $P \vee P \Leftrightarrow P$ 1b. $P \wedge P \Leftrightarrow P$

Leyes asociativas

2a. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ 2b. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

Leyes conmutativas

3a. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 3b. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

Leyes distributivas

4a. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 4b. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Leyes de identidad

5a. $P \vee F \Leftrightarrow P$ 5b. $P \wedge V \Leftrightarrow P$

6a. $P \vee V \Leftrightarrow V$ 6b. $P \wedge F \Leftrightarrow F$

Leyes del complemento

7a. $P \vee \sim P \Leftrightarrow V$ 7b. $P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$

8a. $\sim\sim P \Leftrightarrow P$ 8b. $\sim V \Leftrightarrow F$, $\sim F \Leftrightarrow V$

Leyes de De Morgan

9a. $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$ 9b. $\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$

Esperando que hayas comprendido bien el estudio de la equivalencia e implicacion lógicas, ahora veamos algunos ejercicios, en particular los que fueron vistos en la sección anterior.

Razonamientos válidos.

El objetivo fundamental de esta sección es ver si determinados razonamientos son verdaderos o falsos

Por razonamiento se debe entender la afirmación de que determinada proposición (la conclusión) sea consecuencia de las otras proposiciones (las premisas). **Un razonamiento es válido si, y solamente sí, la conjunción de las premisas implica la conclusión, es decir, cuando las premisas son todas verdaderas, la conclusión es verdadera.**

Una observación muy importante que hay que resaltar, es que la **verdad de la conclusión es independiente de la manera de demostrar la validez de un razonamiento**. Una conclusión verdadera no es condición necesaria ni suficiente para la validez de un razonamiento.

Ahora veamos algunos ejemplos que muestran este hecho y la forma que se establece un razonamiento.

Si los Estados Unidos es una democracia, entonces sus ciudadanos tienen el derecho de votar.
Sus ciudadanos tienen el derecho de votar.
....
Por tanto, los Estados Unidos es una democracia.

Se observa que la conclusión es verdadera, pero el razonamiento **no es válido, porque la conclusión no es consecuencia de sus premisas**, esto se entenderá de manera mejor cuando se analicen la tabla de verdad de dicho razonamiento.

Ahora veamos otro ejemplo:

En una democracia al presidente lo elige el pueblo.
En Inglaterra, el primer ministro es el jefe ejecutivo.
El primer ministro británico no es elegido directamente.
....
Por tanto, Inglaterra no es una democracia.

En este caso la conclusión es falsa, pero **el razonamiento es correcto, porque la conclusión es consecuencia de las**

premisas.

Si un razonamiento es correcto, entonces la conjunción de todas las premisas implica la conclusión. Si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera. Sin embargo, si una o mas de las premisas es falsa, la conjunción de todas las premisas es falsa; por tanto, la conclusión puede ser verdadera o falsa.

Todas las premisas pueden ser falsas, la conclusión verdadera y el razonamiento verdadero, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Todos los perro tienen dos patas.
Todos los animales de dos patas son carnívoros.
....
Por tanto, todos los perros son carnívoros.

En este caso, el razonamiento es verdadero y la conclusión verdadera, pero las dos premisas falsas.

Cada uno de estos ejemplos hace resaltar el hecho de que ni el valor de verdad ni el contenido de cualesquiera de las proposiciones que intervienen en el razonamiento determina la validez del argumento.

Ahora veamos las estructuras correctas del razonamiento:

1) p -- > q

p

∴ p

2) p -- > q

~ q

∴ ~ p

Analicemos sus tablas de verdad de cada uno de ellos:

p	q	p -- > q	p	q
V	V	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

La tabla de verdad nos dice que para el primer razonamiento existe únicamente un caso en que ambas premisas son verdaderas, y la conclusión verdadera. Dicho caso se presenta en la primera columna de la tabla, donde observamos que la condicional p --> q es V, p es V y q es V. Por tanto el razonamiento es verdadero

Analicemos el segundo razonamiento:

p	q	p -- > q	~ q	~ p
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	**V**	**V**	**V**

La tabla de verdad del segundo razonamiento observamos que existe en la última columna, pues la condicional p --> q es V la premisa ~q es V y la segunda premisa ~p es V, luego entonces el segundo razonamiento es válido.

Un razonamiento que no es verdadero se llama falacia.

Ahora veamos los siguientes razonamientos que son falacias y observemos sus tablas de verdad.

3) p --> q

q

∴ p

4) p --> q

~p

∴ ~q

La tabla de verdad para el 3) razonamiento es la siguiente:

p	q	p --> q	q	p
V	V	**V**	**V**	**V**
V	F	F	F	V
F	V	**V**	**V**	F
F	F	V	F	F

Si observamos con cuidado la tabla anterior, nos damos cuenta que el razonamiento es válido en la primera columna pues ambas premisas como la conclusion son verdaderas, pero, en la tercera columna nuevamente las dos premisas son verdaderas, pero la conclusión es falsa; por lo tanto, el razonamiento es falso.

La tabla de verdad del razonamiento 4) es la siguiente:

p	q	p --> q	~p	~q
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	**V**	**V**	F
F	F	**V**	**V**	**V**

En este caso, en la tabla de verdad observamos que en la cuarta columna premisas y conclusión son verdaderas, pero en la tercera columna, las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa, luego entonces el razonamiento es falso.

Con todo la anterior se puede decir que un razonamiento depende únicamente de su forma y es independiente del valor de verdad de sus componentes. Las tablas de verdad muestran que si ambas premisas son verdaderas, entonces las conclusones de los razonamientos 1) y 2) son verdaderas. Además muestran que es posible escoger ambas premisas verdaderas sin que la conclusión sea verdadera, como en el caso 3) y 4).

Como otro ejemplo mas, estudiemos la tabla de verdad del siguiente razonamiento:

$$
\begin{array}{l}
p \text{ --> } q \\
q \text{ --> } r \\
\hline
\therefore p \text{ --> } r
\end{array}
$$

La tabla de dicho razonamiento es la siguiente:

p	q	r	p -- > q	q -- > r	p -- > r
V	V	V	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	**V**	**V**	**V**
F	V	F	V	F	V
F	F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	**V**	**V**	**V**

De la tabla se puede observar claramente que las dos premisas son verdaderas en las columnas 1, 5, 7 y 8. Como en cada uno de estos casos la conclusión es verdadera, el razonamiento es correcto.

Con todo lo anterior podemos ahora introducirnos al estudio de la demostración matemática

««««««« Anterior Siguiente »»»»»»»

Demostración matemática.

Una demostración matemática consiste en que a partir de una proposición verdadera R y empleando las tautologías anteriores, se demuestra que una proposición S es verdadera.

La demostración de un teorema consiste en mostrar una argumentación convincente de que el teorema en consecuencia lógica de la hipótesis y teoremas ya demostrados.

Pero, ¿ qué significa que un teorema es consecuencia lógica de las hipótesis y teoremas ya demostrados?. Como veremos a continuación, son precisamente las tautologías las que determinan esto; es decir, las tautologías determinan las reglas de inferencia que se emplean para deducir un teorema a partir de proposiciones conocidas.

El proceso de inferir una proposición t de las proposiciones $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se llama razonamiento y la podemos representar de la siguiente manera:

$$s_1$$
$$s_2$$

s_3

.

.

.

s_n

$\therefore$ t

Con esto se quiere decir que, como las proposiciones $s_1, s_2, ..., s_n$ son verdaderas, por lo tanto, que lo representamos simbólicamente $\therefore$, t es verdadera. A las proposiciones $s_1, s_2, ..., s_n$ se les llama premisas del razonamiento y t conclusión. **Se dice que tal razonamiento es válido si, y solamente sí, la proposición (s_1 ^ s_2 ^ ... ^ s_n) - - > t es una tautología**.

Para ver claro esto, consideremos el siguiente razonamiento:

p: Luis se levanta a las siete.

p --> p_1: Si Luis se levanta a las siete va a clase.

p_1 --> q: Si Luis va a clase, entonces se graduará.

$\therefore$ q: Luis se graduará

La tabla de verdad de este razonamiento es la siguiente:

p	p_1	q	$p \to p_1$	$p_1 \to q$	$p \wedge (p \to p_1) \wedge (p_1 \to q)$	$p \wedge (p \to p_1) \wedge (p_1 \to q) \to q$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

De la tabla anterior nos indica que el razonamiento es válido porque la proposición formada por la conjunción de las premisas implica la conclusión, en otras palabras, la proposición [p ^ (p --> p_1) ^ (p_1 --> q)] --> q es una tautología.

El razonamiento anterior lo podemos ver de una forma general, es decir:

p
p --> p_1
p_1 --> p_2
.

$$\begin{array}{l} \vdots \\ p_n \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Al demostrar un teorema de la forma «si p entonces q» (p --> q), comúnmente se empieza suponiendo que p es dado; después se construye una cadena de proposiciones de la forma p --> p_1, p_1 --> p_2,...,p_n --> q, cada una de las cuales es una hipótesis dada de antemano o un teorema ya demostrado. Tan pronto se llega en esta cadena a la proposición p_n --> q, de ello se concluye q. Este razonamiento es válido, pero ¿ cómo se demuestra el teorema, es decir, como se establece la verdad de la implicación p --> q ?. Para ver esto recuerda que en la sección de condicional o implicación, vimos que precisamente que una implicación p --> q es falsa solamente cuando p es verdadera y q es falsa; entonces todo lo que necesitamos para mostrar que p --> q es verdadera es el caso en que p sea verdadera, y q necesariamente deberá ser verdadera. Esto es precisamente lo que el razonamiento anterior determina, porque siendo un razonamiento válido la proposición formada por la conjunción de las premisas implica la conclusión.

$$[p \wedge (p \to p_1) \wedge (p_1 \to p_2) \wedge \ldots (p_n \to q)] \to q$$

es una tautología. Y resulta que, como en la demostración de un teorema de la forma p --> q, cada una de las proposiciones p, p --> p_1, p_1 --> p_2, ... , p_n --> q es verdadera, puesto que es una hipótesis dada o un teorema demostrado. Así, si p es verdadera, $p \wedge (p \to p_1) \wedge (p_1 \to p_2) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$ es verdadera, porque es una conjunción de proposiciones verdaderas. Pero eso también quiere decir que q debe ser verdadera para que la proposición $[p \wedge (p \to p_1) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)] \to q$ sea verdadera.

Un razonamiento del tipo anterior se puede emplear para demostrar un teorema de la forma «si p entoces q» (p --> q). Se supone la hipótesis p, y después se construye una "cadena" de proposiciones conocidas (hipótesis o definiciones dadas anteriormente, o teoremas demostrados y aplicaciones de éstos) que nos conducen de p hasta q, y de lo cual podemos concluir q.

Veamos ahora un ejemplo de una demostración matemática muy sencilla, pero nos ayudará a entender cada paso de lo ya expuesto hasta el momento.

Teorema: «Si a y b son números pares, entonces a + b es un número par.»
En otras palabras: «La suma de dos número pares, el resultado es un número par.» (p --> q)

La estructura de la demostración es la siguiente:

Supongamos que a y b son números pares. p

Entonces, sabemos por definición de número par
que 2 | a y 2 | b (un número par es divisible siempre por 2). p --

> p_1

Esto significa que a = 2 * m y b = 2 * n para dos enteros m y n, según la definición de lo que significa un número entero divide a otro. p_1 --> p_2

Pero, si a = 2 * m y b = 2 * n, entonces a + b = 2 * m + 2 * n = 2(m + n), por la propiedad distributiva. p_2 --> p_3

Como a + b = 2(m + n) y m + n es un número entero, (la suma de dos números enteros, es entero), entonces 2 | (a + b). p_3 --> p_4

Si a + b es divisible por 2, esto quiere decir que es par, según la definición de número par. p_4 --> q

– – – – – –

Por lo tanto, a + b es un número par.
$\therefore$ q

Como te puedes dar cuenta, la estructura de la demostración, viene dada por una serie de pasos de p hasta q, pasos de los cuales son teoremas, definiciones..etc.

Un análisis de la demostración muestra que el razonamiento es válido. Establece el teorema, porque cada una de sus proposiciones $p \dashrightarrow p_1$, $p_1 \dashrightarrow p_2$, $p_2 \dashrightarrow p_3$, $p_3 \dashrightarrow p_4$ y $p_4 \dashrightarrow q$ es un resultado que ha sido enunciado o demostrado anteriormente.

So el teorema que se va a demostrar no es de la forma p --> q, si no una proposición q, entonces se remplaza p en el argumento anterior por una proposición apropiada p_1 que se conoce y despues se construye una cadena de proposiciones que van de p_1 a q:

$$p_1$$
$$p_1 \dashrightarrow p_2$$
$$p_2 \dashrightarrow p_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\therefore \quad q$$

Este razonamiento establece la verdad de $p_1 \dashrightarrow q$

Ahora veamos los métodos mas usados para la demostración matemática:

1. Demostración directa o por implicación.

Lo estudiado anteriormente describe el método de demostración directa. Es decir, si la proposición p es verdadera y la implicación (p --> q) es verdadera, entonces q es verdadera.

2. Demostación indirecta.

El primer tipo de demostración indirecta se llama **demostración por contraposición**. Como su nombre lo indica, consiste en que para demostrar un teorema de la forma «si p entonces q», demuestra su contrarrecíproco (~q) --> (~p). En este caso se construye una cadena de proposiciones que conducen de (~q) a (~p), en vez de p a q. Esta implicación es verdadera puesto que es fácil verificar que : (~q) --> (~p) es equivalente a p --> q.

Veamos un ejemplo para ilustrar este método de demostración:

Teorema. Sean a, b y c números enteros positivos. Si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.

Demostración. A continuación se va a demostrar el contrarrecíproco o contrapositiva, es decir,

si $a \nless b$, entonces $a + c \nless b + c$.

Supongamos que $a \nless b$, entonces por propiedad tricotómica, $a = b$ ó $b < a$. En el primer caso, si sumamos c a ambos lados de la igualdad se tendría que $a + c = b + c$, y en el segundo caso si sumamos de nuevo c a ambos lados de la desigualdad se tendría que, $b + c < a + c$; observamos que para cualquiera de los dos casos se cumple que $a + c \nless b + c$.

Por tanto, si $a \nless b$, entonces $a + c \nless b + c$.

Veamos otro ejemplo:

Teorema. si x y y son enteros positivos y xy un número impar, entonces x y y son impares.

Demostración. Supongamos que x y y no son impares, entonces, uno de ellos, digamos x, es un número par, es decir, $x = 2z$. Por tanto, $xy = 2yz$, que es un número par, que es lo que queriamos demostrar.

De esta demostración al escribirla en forma explícita, se tiene lo siguiente:

Dado:	xy número impar	p
Demostrar:	x y y son impares	q (p --> q)
Supongamos:	x y y no son impares	~q
Entonces:	xy es par	~p (~q --> ~p)

Observación:

Las siguientes tautologías muestran que en el método indirecto de demostración se puede hacer uso de la hipótesis original y la negación de q, es decir, ~q. La tercera muestra que la doble hipótesis p y ~q puede conducir a una contradicción de la forma r ^ ~r, que es la demostración por **contradicción o reducción al absurdo**.

$$(p \dashrightarrow q) \;\Longleftrightarrow\; [((p \wedge \sim q) \dashrightarrow \sim p)]$$
$$(p \dashrightarrow q) \;\Longleftrightarrow\; [((p \wedge \sim q) \dashrightarrow \sim q)]$$
$$(p \dashrightarrow q) \;\Longleftrightarrow\; [((p \wedge \sim q) \dashrightarrow (r \wedge \sim r)]$$

El segundo método de demostración indirecta de un teorema t consiste en establecer la verdad de t, **estableciendo la falsedad de su negación** de la siguiente manera: se muestra que la negación de t, ~t, lleva a una contradicción de la forma r ^ ~r. Este método se llama demostración por contradicción o por reducción al absurdo.
Si se muestra que ~t implica tal contradicción, es decir, si se establece la verdad de la proposición (~t) --> (r ^ ~r) para alguna proposición r, entonces en virtud de que r ^ ~r es falsa, se concluye que ~t también es falsa (porque los únicos casos en que la implicación es verdadera son V --> V, F --> V, F --> F),y por tanto, t es verdadera. El siguiente ejemplo ilustrará este método:

Teorema. Si S es el conjunto de todos los números primos, entonces S es un conjunto infinito. (p --> q).

Demostración.
Supongamos que no; es decir, que S, es el conjunto de todos los números primos y que S no es infinito. (p ^ ~q), que es la negación de (p --> q).
Entonces S es un conjunto finito, digamos S = $\{p_1,p_2,...,p_k\}$. Como S es finito, el producto $p_1,p_2,....p_k$ de todos los primos en S se puede hacer, y además formar el número b = $(p_1.p_2....p_k) + 1$.
Entonces existe un número primo p' tal que

p' divide a b. (r)

Como p' es primo y S contiene todos los números primos, se debe tener que p'E S. Sin embargo, ningún primo en S divide a b; por tanto,

p' no divide a b. (~r)

Así hemos llegado a una contradicción (r ^ ~r). Puesto que la hipótesis de que el conjunto S no es infinito conduce a la contradicción.

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$$

que es falsa. Por tanto, si S es el conjunto de los números primos, entonces S es un conjunto infinito.

Nota

Cualquier proposición t es equivalente a la proposición (~t) --> (r ^ ~r), independientemente de lo que pueda ser r. Porque si t es V, ~t es F, y como r ^ ~r es F, (~t) --> (r ^ ~r) es V; y si t es falsa, ~t es V, y así (~t) --> (r ^ ~r) es F; entonces t y (~t) --> (r ^ ~r) tiene los mismos valores de verdad y, por tanto son equivalentes. Esto quiere decir que para probar un teorema t por reducción al absurdo se establece la verdad de la proposición (~t) --> (r ^ ~r), para alguna proposición r, y como son equivalentes, queda demostrado el teorema t.

Todo número natural primo mayor que 2 es un número impar.

Demostración.

Este teorema lo podemos expresar en forma de cuantificadores, es decir

$$s: \forall x \in N, p(x) \rightarrow q(x)$$

donde p(x) es la frase abierta «x es un número primo mayor que 2» y q(x) la frase abierta «x es un número impar». Observamos que su negación es:

$$(\sim s): \exists x \in N, p(x) \wedge \sim q(x)$$

Supongamos que existe un número natural x que es primo y mayor que 2, y que no es impar. (~s).

Vamos a ver que esta hipótesis conduce a una contradicción:

Como x no es impar, x debe de ser par, y, por tanto, 2 | x. (r). Pero como x es primo, sus únicos divisores son 1 y x; y como x es mayor que dos, 2 no es un divisor; es decir;

$$2 \nmid x \; (\sim r).$$

Esto nos condujo a la contradicción ~s --> r ^ ~r y por tanto, es falsa. Por lo que concluimos que:
Todo número natural primo mayor que 2 es un número impar.

Los dos ejemplos anteriores muestran que para demostrar que una proposición p es verdadera en una teoría T, se construye una teoría T', obtenida uniendo a T el axioma «~p». Se halla en T' una proposición contradictoria. Si en una teoría una proposición es contradictoria, entonces toda proposición de la teoría es contradictoria, ~p es contradictoria. Por la ley del tercio excluído la teoría no se acepta y, por tanto, p es verdadera en T.

Demostración por disyunción de casos

Si las implicaciones p --> q y ~p --> q son verdaderas, entonces q es verdadera por la tautología

[(p --> q) ^ (~p --> q)] --> q

En efecto, p v ~p es verdadera por la ley del tercio excluído, y por la tautología [(p v q) ^ (p --> r) ^ (q --> r)] --> r; q es verdadera.

Veamos un ejemplo para ilustrar este método:

Teorema. Si *x* es un número racional y *y* es un número irracional, entonces *x* + *y* es irracional. (p --> q).

Demostración.

La proposición es de la forma (p ^ q) --> r, siendo p: x es racional; q: y es irracional; r: $x + y$ es irracional.

Vamos hacer la demostración por contradicción, supongamos que ~[(p ^ q) --> r] o bien, (p ^ q) ^ ~r. Es decir, suponemos que x es racional; y es irracional y $x + y$ no es racional, es decir, y es racional.

Como x y $x + y$ son racionales, tienen la forma x = a/b y $x + y$ = c/d (a,b,c y d números enteros, por definición de número racional).

Entonces ($x + y$) - x = c/d - a/b = (cb - da)/db. Como cb - da y db son números enteros, se deduce de la definición de números racionales que, ($x + y$) - x es un número racional.

Pero ($x + y$) - x = y, lógicamente, y es racional. Es decir, ~q: es falso que y sea irracional. Así pues hemos encontrado la contradicción q ^ ~q. Por consiguiente, hemos demostrado que (p ^ q) --> r es verdadero.

Demostración por contraejemplo

Para demostrar la negación de una implicación se debe dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el cual p y ~q son simultáneamente verdaderas.

Sea p: «n es un entero divisible por 6 y por 4»

Sea q: «n es divisible por 24»

¿Es verdad que p --> q? No, porque, por ejemplo: 12 hace que p y ~q sean simultáneamente verdaderas, pues 12 es divisible por 6 y 4, pero no por 24. Entonces p q.

Demostración por recurrencia o inducción El razonamiento por recurrencia para demostrar que, cualquiera que sea el entero natural *n*, una proposición en la cual intervenga *n* es verdadera. Para eso es suficiente establecer que la afirmación es verdadera para el entero 1 y que si es verdadera para *n*, entonces es verdera para el siguiente de *n* (*n* + 1)
Simbólicamente, la proposición de inducción es la siguiente:

$$p(1) \wedge \forall k[p(k) \dashrightarrow p(k+1)] \dashrightarrow \forall n p(n)$$

Si se puede demostrar que el antecedente $p(1) \wedge \forall k[p(k) \dashrightarrow p(k+1)]$ es verdadera, entonces se deduce que $\forall n p(n)$ es verdadera.
Hay dos pasos en la demostración por inducción:

1. **Paso fundamental:** Probar que p(1) es verdadera.
2. **Paso inductivo:** Probar que $\forall k[p(k) \dashrightarrow p(k+1)]$.

Veamos el siguiente ejemplo:

Mostrar que $\forall n,\ 2^n <= 2^{n+1}$

Demostración:
1. **Paso fundamental:** Probar que p(1) es verdadera:
$2^1 <= 2^{1+1}$ donde, $2^1 = 2$ y $2^{1+1} = 4$; por tanto:

$$2^1 <= 2^{1+1}$$

2. **Paso inductivo:** Probar que $\forall k[p(k) \dashrightarrow p(k+1)]$.
Supongamos que p(*k*) es verdadera: $2^k <= 2^{k+1}$.(hipótesis)
Demostrar: p(*k* + 1): $2^{k+1} <= 2^{k+2}$.

A nuestra hipótesis la podemos multiplicar 2 en ambos lados, es decir
$2^k.2 <= 2^{k+1}.2$, o bien, $2^{k+1} <= 2^{k+2}$, es decir;
p(k + 1) es verdadera.

Próximamente agregaré una lista de ejercicios de demostración Matemática.

««««««« Anterior